Diametros № 30 (December 2011): 2-12

MODALNY STATUS ZDAŃ MATEMATYCZNYCH

– Daniel Chlastawa –

1. WPROWADZENIE

W tradycji filozoficznej zdania matematyczne często były traktowane jako sztandarowy przykład zdań pewnych i prawdziwych w sposób konieczny. Dla wyjaśnienia tego tajemniczego i fascynującego fenomenu niektórzy filozofowie sformułowali koncepcje leżące u podstaw znacznie ogólniejszych i daleko idących w swych konsekwencjach systemów, jak platońska teoria idei czy kantowska filozofia transcendentalna. Inni natomiast, jak Descartes czy Spinoza, usiłowali nadać filozofii postać matematyczną w nadziei, że osiągnięcie przez twierdzenia filozoficzne pewności i konieczności właściwej matematyce pozwoli usunąć niekończącą się sporność tych twierdzeń. Istnieli i istnieją jednak również tacy, którzy starają się niejako odczarować fenomen zdań matematycznych, jawiący się innym jako niemal mistyczny i prowadzący do konsekwencji antynaturalistycznych, jak u Platona i Kanta. Jedni, jak Hume i neopozytywiści, utrzymują, że zdania matematyczne są wprawdzie pewne i konieczne, ale za cenę tego, że są prawdami pustymi, że szczególne właściwości epistemologiczne tych zdań wynikają z ich analityczności. Jeszcze bardziej radykalni filozofowie, jak John Stuart Mill, kwestionują nawet założenie o pewności i konieczności jakichkolwiek zdań matematycznych. Według Milla przedmioty, o których się w tych zdaniach mówi, są ściśle rzecz biorąc fikcjami, ponieważ w doświadczeniu nie spotykamy nigdy linii bez szerokości czy płaszczyzn bez grubości; w najlepszym razie przedmioty te możemy traktować jako pożyteczne idealizacje, tak jak pojęcie punktu materialnego w mechanice. Pojęcia matematyczne wyprowadzone są z doświadczenia, np. z postrzegania rzeczywistych, fizycznych linii i płaszczyzn. Matematyka jest konieczna tylko w tym sensie, że twierdzenia wynikają w sposób konieczny z aksjomatów, ale same te aksjomaty stanowią indukcyjne uogólnienie doświadczeń zmysłowych, w związku z czym zarówno aksjomaty, jak i ich konsekwencje są niepewne i niekonieczne[1]. Filozofowie odrzucający podejście Milla i nie zadowalający się rozwiązaniem konwencjonalistycznym kwestionują założenie, by źródłem matematyki było do-

[1] Zob. Mill [1962] s. 347-353.

świadczenie zmysłowe, zakładając istnienie pewnego rodzaju intuicji matematycznej. Dla empirystów jednak postulaty takie są nieuprawnionymi hipotezami ad hoc. Empirysta millowski jest fallibilistą, dopuszcza bowiem korygowalność zdań matematycznych przez doświadczenie, powołując się m.in. na fakt powstania geometrii nieeuklidesowych. Jest też kontyngentystą, odmawiającym zdaniom tym konieczności bądź wręcz kwestionując samo pojęcie konieczności jako metafizyczne i empirycznie nieuprawnione, a nawet bezsensowne. Takie podejście jest jednak intuicyjnie mało zadowalające: trudno nam nie zgodzić się z tezą, że o ile Cezar *mógł* nie zostać zamordowany, to jednak liczba 9 *nie mogłaby* być parzysta, niezależnie od tego, jak bardzo odmienne od faktycznych warunki miałyby zachodzić. Aby uczynić tej intuicji zadość, należałoby znaleźć wiarygodną, niemillowską teorię bądź o charakterze konwencjonalistycznym, bądź apriorystycznym. Jeśli jednak nawet uporamy się z epistemologią, to wciąż mogą istnieć pewne kontrprzykłady dla tezy, że wszystkie zdania matematyczne są konieczne. Przedstawię i dokonam analizy trzech takich kontrprzykładów: (1) odwołujący się do przygodnych relacyjnych własności empirycznych, (2) odwołujący się do własności wynikających z konwencjonalnych reprezentacji, (3) odwołujący się do relatywizacji do modelu. Zaznaczam przy tym, że nie są to (przynajmniej według mojej wiedzy) argumenty dyskutowane w literaturze, lecz możliwe kontrprzykłady, jakie nasunęły się autorowi podczas rozważań nad zagadnieniem. Niezależnie od tego, czy są one szerzej omawiane i faktycznie przez kogoś wykorzystywane jako kontrprzykłady dla tezy o konieczności wszystkich zdań matematycznych, moją intencją jest ich podważenie lub przynajmniej osłabienie.

Nie zamierzam podawać (równościowej) definicji, czym jest zdanie matematyczne, ponieważ to wymagałoby (równościowego) zdefiniowania, czym jest matematyka, a to nie wydaje się ani możliwe, ani potrzebne. Ograniczę się do paradygmatycznych przykładów zdań o liczbach rzeczywistych czy o zbiorach. Mówiąc, że zdania matematyczne są konieczne, ma się na myśli to, że są one albo koniecznie prawdziwe, albo koniecznie fałszywe, co oddają np. następujące formuły:

a) $\Box p \veebar \Box\neg p$
b) $(p \wedge \Box p) \veebar (\neg p \wedge \Box\neg p)$
c) $(p \Rightarrow \Box p) \wedge (\neg p \Rightarrow \Box\neg p)$

Tezę, że wszystkie zdania matematyczne są konieczne, można wyrazić też jako pogląd, że wszystkie prawdy matematyczne są prawdami koniecznymi.

2. Argument z przygodnych relacyjnych własności empirycznych

We współczesnej filozofii pojęcia możliwości i konieczności oraz zdania zawierające te pojęcia w formie jednoargumentowych operatorów zdaniowych standardowo objaśnia się w intuicyjnej i poręcznej semantyce światów możliwych: zdanie jest możliwe, gdy jest prawdziwe przynajmniej w jednym świecie możliwym, konieczne – gdy jest prawdziwe w każdym świecie możliwym. Taki aparat pojęciowy pozwala również zdefiniować pewne pojęcia metafizyczne: przedmiot możliwy to taki, który istnieje w przynajmniej jednym świecie, przedmiot konieczny istnieje w każdym świecie. Fakt, że jeden przedmiot może istnieć jednocześnie w wielu światach sprawia, że można mówić o transświatowej (nie)identyczności przedmiotów, czyli (nie)identyczności „w poprzek" światów możliwych[2]. Cechami istotnymi (esencjalnymi) przedmiotu są te cechy, które przedmiot posiada we wszystkich światach, w których istnieje; cechami przygodnymi (akcydentalnymi) natomiast te cechy, które nie są istotne[3]. Bycie człowiekiem jest cechą istotną Cezara, ponieważ w każdym świecie, w którym Cezar w ogóle istnieje, jest człowiekiem; natomiast bycie zdobywcą Galii nie jest jego cechą istotną.

Jak wygląda sprawa obiektów matematycznych takich jak liczby? Istnieją dwie typowe koncepcje istnienia tych bytów. Według pierwszej, realistycznej, są one czymś na kształt idei platońskich, istniejącym niezależnie od umysłu. Według drugiej, konstruktywistycznej czy antyrealistycznej, są one konstrukcjami umysłu, a więc bytami od umysłu zależnymi, przy czym zależność tę można pojmować na wiele sposobów, mocniej lub słabiej – jako byty istniejące wyłącznie w aktach umysłu lub jako wytwory tych aktów, konstytuowane przez nie, ale uzyskujące egzystencję samodzielną[4]. Niezależnie od tego, każdy konstruktywizm uznaje przedmioty matematyczne za pochodne względem umysłu, w związku z czym bez wątpienia nie zgodzi się na tezę, że przedmioty te istnieją w każdym świecie możliwym – nie uzna bowiem ich istnienia w światach, w których nie ma w ogóle żadnych umysłów (chyba że przyjmie się, jak Leibniz, istnienie Boga jako bytu koniecznego, myślącego o prawdach matematycznych we wszystkich światach, byłaby to jednak dość radykalna modyfikacja sensu konstruktywizmu). Jeśli

---

[2] Należy pamiętać, że pojęcia przedmiotu (czysto) możliwego i transświatowej identyczności rodzą rozmaite wątpliwości. Posługujemy się nimi dla prostoty i wygody rozważań.

[3] Podane tu pojęcie istoty jako cechy istotnej odpowiada tradycyjnemu szkotystycznemu pojęciu *haecceitas*, czyli istoty indywiduowej. Można również rozważać istotę rodzajową, *quidditas*, czyli zespół cech, których posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem podpadania pod dany rodzaj, oraz istotę w zupełnie innym znaczeniu, jako *essentia*, czyli przeciwieństwo istnienia.

[4] Zob. Murawski [2001] s. 123.

przedmioty matematyczne nie istnieją we wszystkich światach, to zdania mówiące coś o tych przedmiotach nie mogą być konieczne (chyba że przyjmie się jakieś osłabione rozumienie konieczności, np. polegające na tym, że ograniczamy się do światów, w których przedmioty te istnieją). Rozważmy więc stanowisko realistyczne, akceptujące nieograniczoną konieczność zdań matematycznych i przyjrzyjmy się, jakie problemy mogą się pojawić na jego gruncie. Jeżeli wszystkie prawdziwe zdania dotyczące pewnego przedmiotu matematycznego są konieczne, to przedmiot ten posiada wszystkie swoje cechy z konieczności (i na odwrót), więc jego istota (rozumiana jako zbiór cech koniecznych) jest identyczna ze zbiorem wszystkich jego cech. Czy jednak wszystkie cechy przedmiotów matematycznych są konieczne? Wydaje się, że nie, a kontrprzykładami będą chociażby wszystkie cechy relacyjne dotyczące liczb i ich przygodnie istniejących badaczy, np. ludzi. Cecha bycia odkrytą jako przestępna w 1882 roku przez Ferdinanda von Lindemanna przysługuje liczbie π w naszym świecie, nie przysługuje jej natomiast w wielu innych światach, w związku z czym zdanie wyrażające przysługiwanie liczbie π tej własności jest przygodnie prawdziwe[5]. Podobne przykłady można rzecz jasna mnożyć, i nie będą one związane tylko z odkryciami, ale i np. z tym, że określony człowiek w danej chwili w danym miejscu o jakiejś liczbie myśli, podziwia ją czy zapisuje jej symbol. Są to wprawdzie cechy relacyjne, ale nie czyni to ich nieskutecznymi kontrprzykładami, ponieważ cechy relacyjne mogą być również konieczne – np. cecha bycia większą od 3 przysługująca liczbie π. Właściwa odpowiedź na te kontrprzykłady leży gdzie indziej. Otóż zdania przypisujące przedmiotom matematycznym te cechy nie są w ogóle zdaniami matematycznymi! Definicja zdania matematycznego jako zdania opisującego przedmioty matematyczne jest zbyt pochopna i powierzchowna. Aby ją naprawić, należy dodać warunek, że opisuje ono wyłącznie przedmioty matematyczne, że jest ono zdaniem zawierającym wyłącznie pojęcia matematyczne. Zdania stwierdzające uwikłanie bytów matematycznych w empirię nie są zdaniami matematycznymi, ponieważ nie *należą* do matematyki, lecz do faktografii. Z tego względu przygodność tych zdań nie stanowi żadnego kontrprzykładu dla tezy o konieczności zdań matematycznych.

[5] Oczywiście zakładamy tu, że fakty empiryczne naszego świata są rzeczywiście przygodne, że nasz świat nie jest jedynym światem możliwym. Wbrew pozorom nie jest to trywialne założenie, ponieważ odrzucają je wszyscy necesytarianiści, jak Spinoza i Leibniz. Mimo to nawet na gruncie necesytarianizmu można nadać pewien sens twierdzeniu o przygodności tych faktów, mianowicie taki, iż możemy sobie *wyobrazić*, że one nie zachodzą, natomiast nie możemy sobie wyobrazić (a raczej pojąć), by liczba π nie była przestępna.

Omówiony powyżej kontrprzykład empiryczny narzuca się najłatwiej, ale i najłatwiej jest go podważyć. Może jednak da się sformułować jakieś mocniejsze argumenty nieempiryczne? Dwa argumenty tego rodzaju, które za chwilę omówię, wydają się bardziej obiecujące także ze względu na to, że odwołują się do wyników uzyskanych w matematyce współczesnej, nieznanych dawnym apriorystom, w związku z czym ich potencjalna siła rozwiewania złudzeń spowodowanych niewiedzą może wydawać się większa.

3. Argument z własności wynikających z konwencjonalnych reprezentacji

W matematyce do drugiej połowy XIX wieku pojęcie liczby naturalnej było pojęciem intuicyjnym. Liczby naturalne były obiektami pierwotnymi w tym sensie, że nie definiowano ich przez odwołanie do innych obiektów. Sytuacja ta uległa zmianie, gdy Gottlob Frege zaproponował definicję liczb naturalnych jako klas równoliczności, czyli klas zbiorów mających taką samą liczbę elementów. Podobną definicję zaproponował później Bertrand Russell. Okazało się jednak, że tak zdefiniowane liczby są zbiorami „zbyt dużymi" i wraz z rozwojem teorii mnogości w jej postaci aksjomatycznej koncepcja ta została zarzucona. W latach dwudziestych XX wieku John von Neumann przedstawił odmienne, znacznie prostsze i realizowalne w zwykłej teorii mnogości podejście pozwalające definiować nie tylko liczby naturalne, ale i ogólnie tzw. liczby porządkowe, których liczby naturalne są szczególnym przypadkiem. Konstrukcja ta wygląda następująco: przyjmijmy, że liczbą zero jest zbiór pusty, a każda kolejna liczba naturalna jest zbiorem wszystkich liczb ją poprzedzających. Tak więc:

$0 = \varnothing$,
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$,
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, itd.

Przyjmując takie określenie można np. zinterpretować relację mniejszości $<$ między liczbami jako relację należenia $\in$ między zbiorami: przykładowo, $1 < 2$, ponieważ $1 \in \{0, 1\} = 2$ (gdyż $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$). Konstrukcja taka nie jest jednak jedyną możliwą. Możemy np. przyjąć, że zero jest, jak u von Neumanna, zbiorem pustym, a każda kolejna liczba naturalna jest jednoelementowym zbiorem złożonym z jej bezpośredniego poprzednika. Wobec tego:

$0 = \varnothing$,
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$,
$2 = \{1\} = \{\{\varnothing\}\}$,
$3 = \{2\} = \{\{\{\varnothing\}\}\}$, itd.

Powyższa konstrukcja pochodzi od Ernsta Zermelo[6]. Relacji mniejszości nie da się już interpretować jako zwykłe należenie, lecz jako bardziej skomplikowaną własność: $a < b$, gdy a jest elementem b lub jest elementem elementu b, lub jest elementem elementu elementu b itd. Koncepcje te nie wyczerpują jednak wszystkich możliwości – istnieje wiele (a nawet nieskończenie wiele) innych sposobów na zdefiniowanie liczb naturalnych, opierających się na zbliżonych konstrukcjach. Przykłady owego „pluralizmu" w matematyce można mnożyć: kraty można definiować zarówno jako pewne struktury algebraiczne, jak i jako pewne struktury porządkowe, parę uporządkowaną (x, y) można określać równie dobrze jako zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, jak i jako zbiór $\{\{\{x\}, \varnothing\}, \{\{y\}\}\}$, a punkty geometryczne, traktowane klasycznie jako obiekty pierwotne, można zdefiniować jako klasy sfer koncentrycznych o promieniach dążących do zera.

Jakie płyną stąd konsekwencje dla konieczności zdań matematycznych? Można by argumentować następująco: zdanie „$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$", będące prawdą na gruncie konstrukcji von Neumanna, nie jest prawdą konieczną, ponieważ jest fałszywe na gruncie koncepcji Zermelo i innych, zaś zdanie „$2 = \{\{\varnothing\}\}$", prawdziwe u Zermelo, nie jest prawdą u von Neumanna. I ogólnie: istnieją zdania typu „$a = \ldots$", prawdziwe w jednych systemach i fałszywe w innych. Argument ten, choć bardziej obiecujący od empirycznego (mamy tu do czynienia ze zdaniami matematycznymi sensu stricto), jest również błędny. Należy bowiem pamiętać, że definicje liczb naturalnych poprzez konstrukcje w stylu podanych powyżej są tylko i wyłącznie *konwencjonalnymi reprezentacjami*, a nie ontologicznymi redukcjami, sprowadzającymi byty, jakimi są liczby, do bytów, jakimi są zbiory określonego rodzaju. Ani definicja „$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$", ani definicja „$2 = \{\{\varnothing\}\}$" nie ujawnia „prawdziwej natury" liczby 2, definicje te nie konkurują ze sobą w zawodach na ujawnianie natury czegokolwiek, bo są konwencjami, wśród których nie można wyróżnić żadnej właściwej (choć zapewne można wyróżnić bardziej i mniej poręczne), i to nie dlatego, że jest to zadanie przekraczające nasze możliwości poznawcze, ale dlatego, że wszystkie te interpretacje są w równej mierze arbitralne. Możemy utożsamiać liczby naturalne nawet ze stosami kasztanów czy wiązkami patyków, byle tylko połączenie (stos, wiązka itd.) dwóch indywiduów dodane do połączenia trzech indywiduów tworzyło połączenie pięciu indywiduów. Stawianie obok siebie na jednej płaszczyźnie dwóch różnych konstrukcji teoriomnogościowych dla liczb naturalnych, czego dokonuje się w argumencie przeciw-

[6] Chociaż na gruncie takiego podejścia (w przeciwieństwie np. do konstrukcji von Neumanna) nie jest możliwe zdefiniowanie liczb porządkowych nieskończonych, to nie stanowi to problemu, ponieważ w rozważaniach tych interesują nas wyłącznie konstrukcje liczb naturalnych.

ko konieczności, jest nieuprawnione, ponieważ konstrukcje te są ze sobą w pewnym sensie *całkowicie niewspółmierne*. W przeciwnym razie można by zestawiać ze sobą również różne systemy zapisu liczb naturalnych, np. dziesiątkowy i szóstkowy, i stwierdzić, że liczba osiem w jednym z tych zapisów posiada zapis jednocyfrowy, a w drugim dwucyfrowy. Jest to oczywiście prawda, ale upatrywanie w tym czegokolwiek zastanawiającego, a może nawet sprzeczności, byłoby niedorzeczne. Równie niedorzeczne jest przekonanie, jakoby różne teoriomnogościowe konstrukcje liczb naturalnych były ze sobą niezgodne w jakimś istotnym sensie tego słowa, przy którym prawdy jednego systemu nie mogą być prawdami koniecznymi. Konstrukcje te nie służą, jak się rzekło, ujawnianiu natury liczb naturalnych, dotąd przed nami zakrytej, lecz stworzeniu interpretacji z pewnych względów wygodnej, mając pełną świadomość jej konwencjonalności. Jeśli już wyraźnie zdecydujemy się na jedną konstrukcję, np. von Neumanna, eliminując pozostałe, to zdania prawdziwe na gruncie tej konstrukcji będą prawdami koniecznymi. Pozostałe konstrukcje nie będą się w ogóle liczyły jako kontrprzykłady, ponieważ zostały one wykluczone ex definitione na etapie określania fundamentów teorii. Podobnie, przyjmując *konwencjonalnie* dziesiętny system zapisu liczb naturalnych sprawiamy, że prawdziwe zdania postaci „rozwinięcie liczby a ma n cyfr" będą prawdami *koniecznymi*, ponieważ w każdym świecie możliwym, w którym dokona się policzenia ilości cyfr tego rozwinięcia w układzie dziesiętnym, dojdzie się do tego samego, jednoznacznie określonego wyniku.

Argumentację można by w tym miejscu zakończyć, ale można ją też kontynuować i twierdzić, że zdania identyfikujące liczby naturalne z pewnymi zbiorami nie są w ogóle, wbrew pozorom, zdaniami matematycznymi, a więc gdyby nawet były przygodne, nie podważałoby to tezy o konieczności zdań matematycznych. Wymagałoby to kolejnej rewizji definicji zdania matematycznego i uznania tych zdań za coś więcej niż zdania zawierające wyłącznie terminy matematyczne. Można bowiem uznać, że „rzeczywistymi" zdaniami matematycznymi (w tym przypadku arytmetycznymi) są zdania typu „$a < b$", „$a + b = c$", „$a \mid b \cdot c$" itd., natomiast zdania utożsamiające liczby z pewnymi zbiorami to tylko pewne konwencje, adekwatne o tyle, o ile zachowują wartość logiczną wszystkich „rzeczywistych" zdań arytmetycznych. O ich „nierzeczywistości" świadczy m.in. to, że dokonują one identyfikacji obiektów z dwóch całkiem różnych porządków: liczb i zbiorów. „Rzeczywiste" zdania arytmetyczne opisują własności i relacje liczb istotne dla arytmetyki, natomiast teoriomnogościowe identyfikacje tego nie czynią. Podobne podejście reprezentują przedstawiciele tzw. strukturalizmu matematycznego[7], według których obiekty matematyczne, jak liczby, to tylko pozbawione wewnętrznej natury „miejsca w strukturach", dla których istotne są wyłącznie cechy wynikające z zajmowania danego miejsca. Z tego punktu widzenia można uznać, że teoriomnogościowe identyfikacje liczb nie są rzeczywistymi zdaniami matematycznymi, ponieważ nie opisują własności liczb związanych ze znajdowaniem się w strukturze liczb naturalnych, lecz arbitralnie utożsamiają te liczby z pewnymi zbiorami – arbitralnie, gdyż do natury żadnej liczby nie należy bycie pewnym zbiorem, jako że liczby w ogóle nie posiadają natury wewnętrznej.

4. ARGUMENT Z RELATYWIZACJI DO MODELU

Innym kontrprzykładem, wykorzystującym współczesne wyniki formalne, jest argument z relatywizacji do modelu. Najkrócej można go wysłowić następująco: niektóre zdania matematyczne nie są koniecznie prawdziwe, ponieważ nie są prawdziwe we wszystkich modelach. Przykładem może być teoriomnogościowa hipoteza continuum (*continuum hypothesis*, dalej w skrócie CH) głosząca, że nie istnieje zbiór, którego moc byłaby większa od mocy zbioru liczb naturalnych i mniejsza od mocy zbioru liczb rzeczywistych. Została ona sformułowana przez Cantora, który próbował jej dowieść. Wysiłki Cantora i innych były bezskuteczne, i nie mogło być inaczej. W 1939 Kurt Gödel udowodnił niesprzeczność CH z teorią mnogości Zermelo-Fraenkla ZF, a w 1963 Paul Cohen wykazał niesprzeczność negacji CH z ZF. Te dwa wyniki razem wzięte prowadzą do twierdzenia, że CH jest zdaniem nierozstrzygalnym na gruncie teorii ZF, a więc zdaniem, którego w tej teorii nie można ani udowodnić, ani obalić. W jednych jej modelach jest ono prawdziwe, a w innych fałszywe[8]. Nie przysługuje mu więc konieczna prawdziwość.

Argument taki, w przeciwieństwie do dwóch poprzednich, wydaje się dość wyrafinowany i niepodatny na szybką ripostę. Jedna z nasuwających się strategii odpowiedzi mogłaby być następująca: w każdym z modeli hipoteza continuum posiada *inne znaczenie*, nie mamy tu więc jednego zdania pozbawionego koniecznej prawdziwości, lecz *wiele* różnych w istocie zdań, z których każde z osobna może być koniecznie prawdziwe lub koniecznie fałszywe. Gdybyśmy zgodzili się na relatywizację wartości logicznej hipotezy continuum do modelu, to analogiczny argument można by sformułować przeciwko koniecznej prawdziwości zdania

[7] Np. Resnik [1997].

[8] Ściśle rzecz biorąc nie możemy mówić o modelach teorii ZF, ponieważ nie dysponujemy dowodem jej niesprzeczności. Stwierdzenie to jest uprawnione tylko w tym sensie, że jeśli teoria ta w ogóle posiada modele (a więc gdy jest niesprzeczna), to są wśród nich takie, w których CH jest prawdziwe i takie, w których jest fałszywe.

„2 + 3 = 5”: wystarczy zinterpretować symbol „+” jako symbol mnożenia, a symbol „3” jako nazwę liczby cztery (pozostałe symbole interpretując standardowo), by otrzymać zdanie nie tylko nie będące prawdą konieczną, ale będące po prostu fałszem. Kontrprzykład taki byłby jednak humorystyczny: zdania nie są obiektami czysto syntaktycznymi, które można interpretować dowolnie, lecz obiektami wyposażonymi w pewne znaczenie. Kiedy zaś nadajemy zdaniu „2 + 3 = 5” takie znaczenie, jakie ono posiada faktycznie (tzn. dla normalnego użytkownika języka), to musi ono być koniecznie prawdziwe. Podobnie powinno być z hipotezą continuum: kiedy nadamy jej dostatecznie precyzyjny sens, to będzie ona prawdziwa lub fałszywa, i to w sposób konieczny (oczywiście o ile jesteśmy realistami w sensie Michaela Dummetta, tzn. uznajemy, że zdania niedowodliwe i nieobalalne, jak CH właśnie, mogą posiadać jednoznacznie określoną wartość logiczną). Zarysowana tu odpowiedź wydaje się jednak zbyt uproszczona. Nie jest bowiem jasne, czy CH rzeczywiście posiada inne znaczenie w różnych modelach. Istnieje silny i naturalny związek pojęcia modelu z pojęciem świata możliwego. Weźmy pod uwagę zdanie „Warszawa jest stolicą Polski w 2010 roku” w jego faktycznie ustalonym znaczeniu. Możemy rozpatrywać to zdanie w różnych światach możliwych – w jednych z nich, np. w naszym, jest ono prawdziwe, w innych zaś jest fałszywe. Mimo to przechodząc od świata do świata nie zmieniamy sensu tego zdania, pozostaje on parametrem stałym. Jak wygląda sprawa z CH i innymi zdaniami matematycznymi? Jest to delikatna kwestia. W odniesieniu do tych zdań (oraz ich zbiorów, czyli teorii) funkcjonują pojęcia (nie)standardowych, czyli (nie)zamierzonych interpretacji i modeli. Rozważmy arytmetykę Peano, stanowiącą formalizację intuicyjnej arytmetyki liczb naturalnych. Teoria ta sformułowana w języku I rzędu posiada wiele modeli[9], wśród których znajdują się modele nieizomorficzne, a więc – mówiąc w pewnym uproszczeniu – radykalnie od siebie różne. Do modeli arytmetyki Peano należą m.in. modele zawierające elementy, które można interpretować jako nieskończenie duże liczby naturalne. Istnienie takich obiektów jest jednak czymś rażącym, ponieważ liczby naturalne pojmujemy jako obiekty skończone, powstające przez zastosowanie skończoną liczbę razy operacji następnika do liczby zero. Takie „patologiczne” modele nazywamy niestandardowymi (niezamierzonymi) właśnie dlatego, że są niezgodne z wyjściowymi intencjami, z jakimi przystępujemy do konstruowania teorii; modele standardowe (zamierzone) to z kolei takie, które są z tymi intencjami zgodne. Fakt istnienia rozmaitych modeli arytmetyki sprawia, że zdanie „nie istnieją liczby nie-

[9] Ze względu na brak dowodu niesprzeczności arytmetyki Peano ma tu miejsce to samo zastrzeżenie, co w przypisie poprzednim.

osiągalne przez operację następnika" jest w jednych z nich – mianowicie standardowych – prawdziwe, w innych zaś – mianowicie niestandardowych – fałszywe. Czy oznacza to jednak, że zdanie to przestaje być koniecznie prawdziwe? Taki wniosek wydaje się zbyt daleko idący, ponieważ modele, w których jest ono fałszywe, są modelami właśnie niestandardowymi, a więc czymś, co w ogóle nie liczy się jako rzetelny kontrprzykład. Formalizując jakąkolwiek teorię dążymy do tego, by posiadała ona wyłącznie modele standardowe, czyli zgodne z naszymi intencjami. Niestety, oczekiwanie to nie zawsze może być spełnione, jak w przypadku arytmetyki, ale traktujemy to raczej jako formalny wybryk, który nie powinien przesłaniać nam założeń wyjściowych oraz przekonania, że jako zdania matematyczne mają one walor uniwersalny, a więc że są konieczne. (Warto w tym miejscu zauważyć, że istnieją sposoby na radzenie sobie z tego rodzaju „wybrykami": arytmetyka Peano sformułowana w języku II rzędu jest kategoryczna, tzn. posiada wyłącznie modele izomorficzne ze sobą nawzajem, nie ma więc wśród nich modeli niestandardowych.) W przypadku teorii mnogości wyróżnienie modeli standardowych nie jest niestety tak proste jak w arytmetyce: operowanie na liczbach kardynalnych nieskończonych, w przeciwieństwie do operowania na liczbach naturalnych, nie wiąże się w żaden sposób z praktyką życiową i nie miało okazji ugruntować się w długiej ewolucji naszego gatunku, w związku z czym nasze intuicje teoriomnogościowe są dużo bardziej mgliste od arytmetycznych. Niemniej jednak można powiedzieć, że problem dotyczy nas, a nie rzeczy samej, że teoria ZF będąca ludzkim tworem jest niekompletna, ponieważ jej aksjomaty nie charakteryzują obiektywnego pojęcia zbioru z dostateczną dokładnością. Oczywiście tego rodzaju realizm z różnych względów może komuś nie odpowiadać, a nawet jeśli się z nim zgadzamy, to możemy mieć trudności ze znalezieniem dla niego dostatecznego uzasadnienia. Jeśli jednak go nie przyjmiemy, to wydaje się, że nie będziemy w stanie uniknąć wysoce nieintuicyjnej i niewygodnej konsekwencji, że CH jest zdaniem przygodnym we właściwie takim samym sensie, w jakim jest nim zdanie „Cezar został zamordowany": struktura i własności zbiorów istniejących w jednym świecie różnią się od struktury i własności zbiorów w innym świecie, w związku z czym w jednych z tych światów CH jest prawdziwa, a w innych fałszywa. Niekonkluzywność stanowiska realistycznego w teorii mnogości sprawia, że argument przeciwko kontrprzykładowi z relatywizacji do modelu musi pozostać również niekonkluzywny.

5. Podsumowanie

Jeśli wbrew J.S. Millowi będziemy chcieli zająć dominujące w tradycji stanowisko, że wszystkie zdania matematyczne są konieczne, że nie ma przygodnych zdań matematycznych (a tym bardziej że nie jest prawdą, by wszystkie takie zdania były przygodne), to oprócz odparcia argumentów empirystycznych możemy stanąć w obliczu kontrprzykładów innej natury. Trzy takie możliwe kontrprzykłady analizowałem w niniejszej pracy. Dwa z nich wydają się nie przedstawiać sobą poważniejszych trudności, jeden natomiast zasługuje na większą uwagę i do odrzucenia go trzeba przyjąć dość mocne, realistyczne założenia dotyczące matematyki. Nie można wykluczyć, że da się sformułować inne tego rodzaju (tzn. nieodwołujące się bezpośrednio do epistemologii) argumenty, jednakże ta trójka wydaje się nasuwać w sposób najbardziej naturalny. Jeśli nie przyjmujemy radykalnego empiryzmu, to teza o konieczności przysługującej wszystkim zdaniom matematycznym wydaje się dość intuicyjna i oczekujemy, by dało się znaleźć odpowiedź na pojawiające się kontrprzykłady. Przedstawiona tu próba uporania się z nimi pozwala mieć nadzieję, że jest to możliwe.

Bibliografia

Mill [1962] – J.S. Mill, *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, t. I, tłum. Cz. Znamierowski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1962.

Murawski [2001] – R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Resnik [1997] – M. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford 1997.